复变函数引论

第一章：复数与复变函数.

对于复数z，它的实部是 $Re(z)$，虚部是 $Im(z)$.

$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. $\Rightarrow$ 欧拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

○复数的幅角：$Arg\, z = \theta_0 + 2k\pi$.

* 复数辐角的主值：$\arg z = \theta_0 \in [0, 2\pi)$.

○复数的模：$|z| = |re^{i\theta}| = r$.

⇓

模与辐角的运算：$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

$Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

$Arg(z_1/z_2) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

○复数的性质（见书，非重点）

例1、证明 $z^2 = |z|^2$ 是否正确.

答：$z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z^2 = z\cdot\bar{z} \Leftrightarrow z(z-\bar{z}) = 0$.

$\Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

故，当且仅当 $z\in\mathbb{R}$ 时，$z^2 = |z|^2$

\# 变体：求 $\max|\alpha z^n + \beta|$
提出 $|\alpha|$ 即可迁移

(重点) 例2、求 $\max(|z^n + \alpha|)$. $n\in N^*$. $\alpha \in \mathbb{C}$. $|z| \le r$. $r>0$.

解：(1) 当 $\alpha = 0$ 时，

$\max(|z^n+\alpha|) = \max(|z^n|) = r^n$.

这时，可以取 $z = re^{i\theta}$ $\theta\in[0,2\pi)$

(2) 当 $\alpha \ne 0$ 时，$|z^n + \alpha| \le |z^n| + |\alpha| \le r^n + |\alpha|$（三角不等式）

令 $\alpha = r_0 e^{i\theta_0}$，$r_0>0$. $\theta_0\in[0,2\pi)$. $\theta_0 = \arg\alpha$. $r_0 = |\alpha|$.

若要使 $|z^n+\alpha| \le |z^n| + |\alpha|$ 等号成立，必有 z^n 与 α 共线且同向，

即 $z^n = \lambda\alpha$. 其中 $\lambda > 0$. …… (1)

若要使 $|z^n| + |\alpha| \le r^n + |\alpha|$ 等号成立，必有 $|z| = r$ …… (2)

当(1)、(2)式均成立. $|z^n+\alpha|$ 取到最大模 $r^n + |\alpha|$.

考虑 $z^n = \lambda\alpha$，两边取模，有 $|z^n| = \lambda|\alpha|$.

又由 $|z| = r$ 有，$r^n = \lambda|\alpha| \Rightarrow \lambda = \frac{r^n}{|\alpha|}$.

代入，得到 $z^n = \frac{r^n}{|\alpha|}\alpha = \frac{r^n}{|\alpha|} r_0 e^{i\theta_0} = \frac{|\alpha|}{|\alpha|} r^n e^{i\theta_0} = r^n e^{i\theta_0}$

即 $z^n = r^n e^{i\theta_0}$.

故 $z = z_k = re^{\left(\frac{i\theta_0 + 2(k-1)\pi}{n}\right)}$ $k = 1, 2, \cdots, n$. 其中 $\theta_0 = \arg\alpha$.

（* z_k 的n个点构成了以r为半径、以α为圆心的圆上均匀的n个点.）

综上. 当 $\alpha = 0$ 时. $\max(|z^n+\alpha|) = r^n$. $z = re^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi)$

当 $\alpha\ne 0$ 时，$\max(|z^n+\alpha|) = r^n + |\alpha|$. $z = z_k = re^{\left(\frac{i\theta_0+2(k-1)\pi}{n}\right)}$, $\theta_0 = \arg(\alpha)$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

例2.(Extension).

求 $z^n+\alpha$ 的最大模、最小模，与取值范围.

例3、作业23题与作业24题.

例4、若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$. $z'=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=0$. 试证 z_1、z_2、z_3 对应的三角形是正三角形

解：令 $f(z)=\prod_{n=1}^{3}(z-z_i)=z^3+az^2+bz+c$. 它的3个零点时是 z_1,z_2,z_3.

$a=-(z_1+z_2+z_3)$. $b=(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3})z_1z_2z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3$

$c=-z_1z_2z_3$

故、$b=-c(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3})$.

若 $|z_k|=r$，那么 $z_k\cdot\bar{z}_k=r^n$，故 $\frac{1}{z_k}=\frac{\bar{z}_k}{r^2}$.

代入，得到：$b=-\frac{c}{r^2}(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)=-\frac{c}{r^2}\overline{(z_1+z_2+z_3)}=-\frac{\bar{a}c}{r^2}$.

由题有 $a=0$. 故 $b=-\frac{c}{r^2}\bar{a}=0$.

$f(z)=z^3-z_1z_2z_3$

不妨令 $f(z)=0$，此时有 $z^3=z_1z_2z_3=r^3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=r^3e^{i\theta_0}$ (设 $\theta_0=\theta_1+\theta_2+\theta_3$)

故 $z=z_k=re^{\frac{1}{3}(i\theta_0+2(k-1)\pi)}$ $k=1,2,3$.

现在求 $\arg z_{k+1}-\arg z_k$.

$$\arg z_{k+1}-\arg z_k=\arg\frac{z_{k+1}}{z_k}=\arg e^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{2}{3}\pi.$$

故三圆心角均为 $\frac{2}{3}\pi$、三角形为等边三角形

例5、分圆多项式的证明(见习题答案)

例6、作业29题