第二章. 复函数与复映射(解析函数)

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 其中, $z\in\mathbb{C}=x+iy$.

例1、

(1) $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y$

【考点】
(2) $\cos(z)=\cos(x+iy)=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x+i\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x$

$\sin(z)=\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x$.

其中. $e^{-iz}=e^{y-ix}=e^y(\cos x-i\sin x)$

$e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$

柯西-黎曼条件:

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域D内, 则 $f(z)$ 在D内一点 $z=x+iy$ 可导的充要条件:

$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 且满足: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

复函数的一阶导与n阶导:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$$

解析：

若$f(z)$在z_0的一个邻域处处可导，那么称它在z_0解析.

例2：(解析函数的示例)：

(1). $P_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$

解：(直接求出导数) $P_n'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nC_nz^{n-1}$.

?* (2) $e^z=e^{x+iy}$

解：(直接求出导数) $(e^z)'=e^x(\cos y+i\sin y)$

(3) $\sin(x+iy)$ / $\cos(x+iy)$.

[考点]例3：证明 $\cos(x+iy)=A+Bi$，$A,B\in\cancel{\mathbb{C}}\,\mathbb{R}$. 有无穷多解.

解：~~(1) 当B=0时~~ 即证(利用例1) $\begin{cases}A=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x\\ B=\dfrac{e^{-y}-e^y}{2}\sin x\end{cases}$ 有无穷多解.

(1) $B=0$时、$\sin x=0$或者$y=0$.

1° 若$|A|\le1$时，不妨取$y=0$. 此时另一方程变为$A=\cos x\in[-1,1]$.

取解：$\begin{cases}x=x_k=\arccos A+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\\ y=0.\end{cases}$ ，有无穷多组解.

2° 若$|A|>1$时，不妨取$\sin x=0$且$\cos x=\begin{cases}1 & A>0\\ -1 & A<0\end{cases}$.

另一方程变为$|A|=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$. (y总存在解).

而$x=\pi I_{A<-1}+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$. 共无穷多组解.

(2) $B\ne0$时，用y表示$\sin x,\cos x$，并代入$\sin^2x+\cos^2x=1$. 可以得到.

$$\left(\frac{2A}{e^y+e^{-y}}\right)^2+\left(\frac{2B}{e^y+e^{-y}}\right)^2=1.$$

令$g(y)=\left(\dfrac{2A}{e^y+e^{-y}}\right)^2+\left(\dfrac{2B}{e^y+e^{-y}}\right)^2$. 不难有$g(y)$是偶函数

由于$g(y)$连续，且$\lim_{y\to0^+}g(y)=+\infty$，$\lim_{y\to+\infty}g(y)=0$.

故必然存在 $y_{AB}>0$. s.t. $g(\pm y_{AB})=1$. 即$g(y)=1$必有解.

代回 $\cos x=\dfrac{2A}{e^y+e^{-y}}\in(-1,1)$. 有无穷多解.

例4：证明 $\sin(x+iy)=A+Bi$，$A,B\in\cancel{\mathbb{C}}\,\mathbb{R}$ 有无穷多解.

即证 $\begin{cases}A=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x\\ B=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x\end{cases}$ 有无穷多解.

(1). $B=0$时，$\cos x=0$或者$y=0$.

1° 若$|A|\le1$时，取$y=0$. 此时另一方程变为$A=\sin x\in[-1,1]$.

取解：$\begin{cases}x=x_k=\arcsin A+2k\pi., & k\in\mathbb{Z}.\\ y=0\end{cases}$ 有无穷多组解.

2° 若$|A|>1$时，取$\cos x=0$且$\sin x=\begin{cases}1 & A>0\\ -1. & A<0\end{cases}$

另一方程变为 $|A| = \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$，$y$ 总有解.

而 $x = \pi I_{A<-1} + 2k\pi$ 有无穷多个解.

(2) $B \neq 0$ 时，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

令 $g(y) = \left(\dfrac{2B}{e^y - e^{-y}}\right)^2 + \left(\dfrac{2A}{e^y+e^{-y}}\right)^2 = 1$.

由于 $g(y)$ 连续. $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y) = +\infty$. $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$.

故 $g(y)$ 总有解，则 $\sin x = \dfrac{2A}{e^y+e^{-y}}$ 有无穷多解.

例5. $\ln(3+4i) = \ln|3+4i| + i\arg(3+4i)$

$= \ln 5 + i\arg(3+4i)$

$\ln i = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} i$

$\ln(-i) = \ln|-i| + i(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi i$

$\ln(e^{i\theta}) = \ln|e^{i\theta}| + \arg(e^{i\theta}) = i\theta$，$\theta \in [0, 2\pi)$.

$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg z$.

$a^b = e^{b\operatorname{Ln} a}$　$a \neq 0$ $(a \neq e)$

例6. 求 $1^{\frac{m}{n}}$，$m, n \in \mathbb{Z}$. $n \neq 0$. $(n \geq 1)$.

$1^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\operatorname{Ln} 1} = e^{\frac{m}{n}(\ln 1 + 2k\pi i)} = e^{\frac{m}{n} 2k\pi i} = \cos\dfrac{2mk\pi}{n} + i\sin\dfrac{2mk\pi}{n}$

其中，$k = 0, 1, \cdots, n-1$.

特别地，$m = 1$ 时，$1^{\frac{n}{m}} = 1$. $\forall m \in \mathbb{Z}$.

例7. $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi i} = \cos 2\sqrt{2}k\pi + i\sin 2\sqrt{2}k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$.

令 $z^k = \cos 2\sqrt{2}k\pi + i\sin 2\sqrt{2}k\pi$，则 $|z_k| = 1$.

若有 $z_k = z_j \Rightarrow e^{2\sqrt{2}k\pi i} = e^{2\sqrt{2}j\pi i} \Rightarrow e^{2\sqrt{2}(k-j)\pi i} = 1 = e^{2n\pi i}$.

假如 $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}(k-j)\pi i = 2n\pi i$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(k-j) = n$.

由于 $\sqrt{2}$ 为无理数，$k-j=0$，$n=0$.

即 $z_k = z_j \Leftrightarrow k = j$. 即 $\{z_k\}$ 互不相同.

$\{z_k\}$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上构成可数稠密集合.

例8、若$f(z)$的模为常数或辐角为常数，$f(z)$又处处可导，则$f(z)$是常数．

证明：若$f(z)\equiv 0$，原式成立

若$f(z)\not\equiv 0$，由于$f(z)$的模为常数或辐角为常数，$f(z)\neq 0$．

这时，$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z) = u + iv$

这时，$u=\ln|f(z)|$是常数或$v=\arg f(z)$是常数

令$g(z)=\ln f(z) \Rightarrow g'(z) = (\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$

由$f(z)\neq 0$，$g(z)$处处可导．又$g(z)$的实部u或虚部v是常数

由C-R定理：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

故$u、v$均为常数，因此$\ln f(z)$是常数，$f(z)$是常数．

↓

更一般地：

假设经$f(z)$后，区域D映射到D'（面积分别为$S、S'$）

对Jacobi矩阵：$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = J$．

$$S' = \iint_{D'} du\,dv = \iint_D \|J\|\, dx\,dy = \iint_D \left\| \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right\| dx\,dy$$

由于f是可导，满足C-R条件．

$$\det J = |J| = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$$

故$S' = \iint_D |f'(z)|^2\, dx\,dy \geq 0$．

由于$f'(z)$在一点上不为0，必在其邻域里不为0．

故$S'=0 \iff f'(z)\equiv 0 \iff f(z)$是常数

故映成面积为0时，一定是映成了常数．