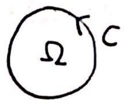
第三章. 复积分.

Cauchy-Goursat定理:

若$f(z)$在简单闭曲线C内处处可导，在C上连续，则有 $\oint_C f(z)dz=0$.

Green公式:

若$P.Q\in C^1$, $\oint_C Pdx+Qdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$



复合闭路定理(略)

例1. 求积分 $I_n=\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^n}dz$. n是整数.

当$n\le 0$时，① $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 在复平面上处处可导(此时 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 是多项式或常数)

此时, $I_n=0$.

当$n>0$时，令 $z=z_0+re^{i\theta}$, $dz=ire^{i\theta}d\theta$.

$$\Rightarrow I_n=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}}d\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta.$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\left(\int_0^{2\pi}\cos(1-n)\theta\, d\theta+i\int_0^{2\pi}\sin(1-n)\theta\, d\theta\right)$$

$$=\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\ge 2.\end{cases}$$

综上, $I_n=\begin{cases}0 & n\ne 1.\\ 2\pi i & n=1\end{cases}$

例2. 求积分 $I_k=\oint_{|z|=r>0}\frac{\sin z}{z^k}dz$.

$$\sin z=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-k-1}}{(2n-1)!}\cdot z^k.$$

$$\Rightarrow I_k=\oint_{|z|=r>0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-k-1}}{(2n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z^{k+1-2n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}I_{k+1-2n}.$$

$$=\begin{cases}0 & \text{其它}\\ \frac{(-1)^{\frac{k-2}{2}}2\pi i}{(k-1)!} & k=2n.\end{cases}$$

~~例3~~、

Cauchy 导数公式：

若$f(z)$在圆盘$|z-z_0|<r$内可导，在$|z-z_0|=r$上连续，则n是非负整数时候有：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

一个函数在这一点~~邻域~~解析的充要条件是它在这一点的邻域内处处等于它的泰勒级数

最大模原理：

设$f(z)$在有界区域D内处处可导，在D的边界上∂D连续，

则 $\max\limits_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\max\limits_{z\in\partial D}|f(z)|.$

这里，$\bar{D}=D\cup\partial D$称为D的闭包

调和函数 $u(x,y)$.

满足：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

~~推论~~、最大(小)值原理：

若u是调和函数(有界区域D内满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$)，

那么u在∂D上取最大最小值.

~~证明：设 $f=u+iv$~~.

例3：证明代数学基本定理

设$P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kz^k$，$C_n\neq0$，$n\geqslant1$. 则$P_n(z)$至少有1个零点

证明：

引理1：$\lim\limits_{z\to+\infty}P_n(z)=\infty$

由$P_n(z)=z^n(C_n+\frac{C_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{C_0}{z^n})$

$\exists R_0>0$，当$|z|\geqslant R_0$时，$|P_n(z)|=|z|^n|C_n+\cdots+\frac{C_0}{z^n}|$

$\geqslant|z|^n[|C_n|-\frac{|C_n|}{2}]=\frac{|C_n|}{2}|z|^n\to+\infty$.

引理2：若$f(z)$处处连续，$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，则$f(z)$有界

由于$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，存在$N>0$，$|z|>N$时，$|f(z)|\leq M_1$.

而$|z|\leq N$时，由于$f(z)$处处连续，故在闭圆盘内有最大值M_2.

取$M=\max\{M_1,M_2\}$，有$|f(z)|\leq M$，即$f(z)$有界

反证法：设$P_n(z)$无零点，令$f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$，则$f'(z)=\frac{P_n'(z)}{P_n^2(z)}$处处存在，$f(z)$解析

由引理1，$P_n(z)\to\infty(z\to\infty)\Rightarrow f(z)\to0(z\to\infty)$

故由引理2，$f(z)$有界

由Liouville定理有，$f(z)$是处处解析且有界的，故$f(z)$是常数.

$\Rightarrow P_n(z)$是常数，$\deg P_n(z)=0$，与$C_n\neq0$，$n\geqslant1$，$\deg P_n(z)\geqslant1$矛盾

故$P_n(z)$至少有1个零点.

Liouville 定理：有界的整函数是常数.
（处处可导的函数）

例四：证明 (1) 若 $f(z)$ 处处可导（解析），$G=\{z: |z|=r\}$，$M(r)=\max\limits_{z\in G}|f(z)|$，
则有不等式：

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!\,M(r)}{r^n}, \quad n\in N.$$

(2) 若 $f(z)$ 有界则 $f(z)$ 是常数（Liouville定理）

(3) 若存在常数 $M_0>0$，$m\in N$，$R_0>0$ 使当 $|z|\ge R_0$ 时，有不等式

$$|f(z)| \le M_0 \sum_{k=0}^{m} |z|^k$$

则 $f(z)$ 为一多项式且次数不超过 m.

（见习题三答案）.

(1) 由柯西公式：

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \left| \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \right|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{n+1}|}\,|dz| \qquad (|dz| = |de^{ri\theta}| = r\,d\theta)$$

$$\le \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}}\, r\,d\theta$$

由最大模原理：$M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)| = \max\limits_{|z-z_0|\le r} |f(z)|$.

故 $|f^{(n)}(z_0)| \le \dfrac{n!}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^n}\,d\theta. = \dfrac{n!\,M(r)}{r^n}$ ◻

(2) 由于 $f(z)$ 解析：$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)\,z^n}{n!}$，$\forall z\in \mathbb{C}$. …(1)

而当 $f(z)$ 有界时，存在常数 $M_0>0$，使得 $M(r)\le M_0$.

当 $n\ge 1$ 时有，

$$0 \le |f^{(n)}(0)| \le \frac{n!\,M(r)}{r^n} \le \frac{n!\,M_0}{r^n}$$

当 $r\to+\infty$ 时，$\dfrac{n!\,M_0}{r^n} \to 0$.

故 $|f^{(n)}(0)| \le 0$，由夹逼定理有，$|f^{(n)}(0)|=0$.

故 $f^{(n)}(0)=0$，$n=1,2,\cdots$，

由(1)式有，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)\,z^n}{n!} = f(0)$.

即 $f(z)$ 为常数

(3). ~~$\forall m+j$~~ $j\in N$. ，设 $z=re^{i\theta}$

有 $|f^{(m+j)}(0)|\le \dfrac{(m+j)!M(r)}{r^{m+j}}$

已知 $|f(z)|\le M_0\sum_{k=0}^{m}|z|^k=M_0\sum_{k=0}^{m}r^k$，故 $M(r)=\max\limits_{|z-z_0|\le r}|f(z)|\le M_0\sum_{k=0}^{m}r^k$

对 $|f^{(m+j)}(0)|\le \dfrac{(m+j)!M(r)}{r^{m+j}}\le\dfrac{(m+j)!M_0}{r^{m+j}}\sum_{k=0}^{m}r^k$.

当 $r\to+\infty$ 时，$\forall j\ge1$，有 $|f^{(m+j)}(0)|=0$. 即 $f^{(m+1)}(0)=f^{(m+2)}(0)=\cdots=f^{(m+j)}(0)=\cdots=0$.

故 $f(z)=\sum_{n=0}^{m}\dfrac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$. ，即 $f(z)$ 的泰勒展开

即 $f(z)$ 是一多项式且次数不超过 m.

例15. 求积分 $J=\oint_{|z|=r>1}\dfrac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$.

（见留数）

例16. 求积分 $J_{r,n}=\oint_{|z|=R>r}\dfrac{1}{r^n+z^n}dz$，$n\in N$. $R>r>0$.

（见留数）

例17. 求积分 $J=\oint_{|z-z_0|=r>0}\dfrac{\sin z}{(z-z_0)^n}dz$

$$J=\oint_{|z-z_0|=r>0}\frac{\sin z}{(z-z_0)^n}dz=(\sin z)^{(n-1)}\Big|_{z=z_0}\cdot\frac{2\pi i}{(n-1)!}=\sin\left(z_0+\tfrac{1}{2}(n-1)\pi\right)\cdot\frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

例18. 求积分：$J_n=\oint_{|z|=1}\dfrac{1-\cos4z^5}{z^n}dz$.

$\left(J_n=(1-\cos4z^5)^{(n-1)}\Big|_{z=z_0}\cdot\dfrac{2\pi i}{(n-1)!}\right)$ X

由 $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$ 有 $1-\cos4z^5=1-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(4z^5)^{2n}}{(2n)!}$

$$1-\cos4z^5=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(4z^5)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}(4z^5)^{2m}}{(\cancel{2n})!\,2m}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}4^{2m}z^{10m}}{(2m)!}$$

两边同时除以 z^n，得到：

$$\cancel{J_n=}\ \frac{1-\cos4z^5}{z^n}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}4^{2m}}{(2m)!}z^{10m-n}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}4^{2m}}{(2m)!}\cdot\frac{1}{z^{n-10m}}$$

$$J_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos4z^5}{z^n}dz=\oint_{|z|=1}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}4^{2m}}{(2m)!}\cdot\frac{1}{z^{n-10m}}dz$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}4^{2m}}{(2m)!}\cdot I_{n-10m}\quad m=\frac{n-1}{10}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m-1}4^{2m}}{(2m)!}2\pi i & n=10m+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{10}-1}4^{\frac{n-1}{5}}}{\left(\frac{n-1}{5}\right)!}2\pi i & n=10m+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$