第四章. 级数.

(如果考,只考1道题=).

例1:请叙述Abel定理,收敛半径的定义,并举三例.

Abel定理:

对于$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$,若$f(z_0)$收敛,则$\forall z$,$|z|<|z_0|$时,$f(z)$绝对收敛.

若$f(z_0)$发散,则$\forall z$,$|z|>|z_0|$. $f(z)$均发散.

收敛半径定义:($R>0$).

对于$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$,若$\exists R>0$. 当$|z|<R$时,$f(z)$绝对收敛

而当$|z|>R$时,$f(z)$发散,则$R(>0)$称为$f(z)$的收敛半径.

e.g.1:

$f_1(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}z^n=\frac{z}{1-z}$ $|z|<1$. $R=1$

收敛半径为1. 在$\forall z$. $|z|<1$时,$f_1(z)$收敛.

在收敛圆周上,$|z^n|=1$. $\lim_{n\to+\infty}|z^n|=1$.

通项不趋于0,$f(z)$在收敛圆周上处处发散.

e.g.2.

$f_2(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$. $|z|<1$. $R=1$

当$z=-1$时,$f_2(z)=-\ln(1-z)=-\ln 2$ 收敛

当$z=1$时,$f_2(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

在收敛圆周上,$f(z)$部分收敛,部分发散.

e.g.3.

$f_3(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ $R=1$.

当$|z|=1$时,$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

故$|f_3(z)|$不为无穷.

在~~级~~收敛圆周上,$f(z)$收敛.